

ثالثاً عمليات الصف البسيطة Simple Row Operations



عائلة مكونة من الأب والأم وخمسة أطفال، تنوي الذهاب إلى منتجع على البحر الميت، وكانت بطاقة دخول الطفل إلى شاطئ سباحة منظم تكلف أقل مما تكلف للبالغ بـ ١٥ ديناراً. إذا دفعت العائلة تكلفة الدخول للشاطئ مبلغ ١٠٠ دينار.

(١) كم سعر بطاقة البالغ؟

(٢) كم سعر بطاقة الطفل؟

لحل هذه المسألة، نحول البيانات إلى نظام من المعادلات الخطية، وقد تعلمت كيف تحل النظام بالحذف، أو التعويض، أو التمثيل البياني، أو قاعدة كريمر. ويمكنك حل النظام بما يسمى

طريقة عمليات الصف البسيطة.

وتستخدم طريقة عمليات الصف البسيطة، في حل أنظمة، تتكون من n من المعادلات الخطية، تحتوي n من المتغيرات.

في المسألة السابقة نفرض أن: s سعر بطاقة البالغ، لدينا شخصان بالغان (الأب، والأم) v سعر بطاقة الطفل، لدينا خمسة أطفال

ومنهُ نستنتج نظام المعادلات الآتي:

$$2s + 5v = 100$$

$$s - v = 15$$

نكون ما يسمى **المصفوفة الموسعة**، التي يتكون كل صف منها من معاملات المجاهيل، والحد المطلق في المعادلة الواحدة في النظام، كما يأتي:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 100 \\ 1 & -1 & 15 \end{array} \right]$$

ثم نحول هذه المصفوفة الموسعة إلى مصفوفة أخرى، على الشكل الآتي:

$$\left[\begin{array}{c|cc} ١س & ٠ & ١ \\ \hline ١ص & ١ & ٠ \end{array} \right]$$

وذلك ضمنَ عملياتٍ تهدفُ إلى تحويلِ النظامِ إلى الصورةِ الآتية:

$$١ \times س + ٠ \times ص = ١س \longrightarrow س = ١س$$

$$٠ \times س + ١ \times ص = ١ص \longrightarrow ص = ١ص$$

ويكونُ حلُّ النظامِ (س، ص)

للقيام بذلك نبدأ بالعمود الأول، ونستخدمُ عملياتِ الصفِّ البسيطة لجعلِ المُدخلة ١١ (مُدخلة العمود الأول الصف الأول) واحدًا، ثم نجعلُ باقي مدخلاتِ العمودِ أصفارًا. وبعدها ننتقلُ إلى العمود الثاني ونجعلُ المدخلة ٢٢ (مدخلة العمود الثاني الصف الثاني) واحدًا ثم بقية مدخلاتِ العمودِ أصفارًا،.... وهكذا البقية الأعمدة. وكما يمكننا إجراء عملياتٍ حسابية معينة على أي نظامٍ من المعادلات، دون التأثير على حلِّ النظام؛ ليبقى ممثلًا للموقف ذاته، يمكننا إجراء عملياتِ الصفِّ البسيطة على المصفوفة الموسعة كما في الجدول (٤-٦):

الجدول (٤-٦)

العمليات على النظام	عمليات الصفِّ البسيطة	مثال
تبديل ترتيب المعادلات	تبديل ترتيب صفوفِ المصفوفة الموسعة	تبديل الصفِّ الأول والثاني نرسمُ له $ص \longleftrightarrow ٢ص$
ضربُ أيِّ معادلةٍ بعددٍ حقيقيٍّ لا يساوي صفرًا	ضربُ أيِّ صفٍّ في المصفوفة الموسعة بعددٍ حقيقيٍّ لا يساوي صفرًا	ضربُ الصفِّ الثاني بالعدد ٢- نرسمُ له: $٢ص \longrightarrow ٢ص$
ضربُ أيِّ معادلةٍ بعددٍ حقيقيٍّ، وإضافة الناتج لأيِّ معادلةٍ أخرى.	ضربُ أيِّ صفٍّ في المصفوفة بعددٍ حقيقيٍّ، وإضافة المدخلاتِ الناتجة إلى المدخلاتِ المناظرة إليها في أيِّ صفٍّ آخر.	ضربُ الصفِّ الأول بـ ٤، وإضافة المدخلاتِ الناتجة إلى مدخلاتِ الصفِّ الثاني، ونرسمُ له: $٤ص + ١ص \longrightarrow ٥ص$

والآن سنستخدم هذه العمليات أو بعضها، لحل المسألة الواردة بداية الدرس:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 15 & 1- & 1 \\ 100 & 5 & 2 \end{array} \right] \xleftrightarrow{ص_1 \leftrightarrow ص_2} \left[\begin{array}{c|cc} 100 & 5 & 2 \\ 15 & 1- & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 15 & 1- & 1 \\ 70 & 7 & 0 \end{array} \right] \xleftrightarrow{2-ص_1 + ص_2 \leftarrow ص_2} \left[\begin{array}{c|cc} 15 & 1- & 1 \\ 100 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 15 & 1- & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{array} \right] \xleftrightarrow{\frac{1}{7}ص_2 \leftarrow ص_2} \left[\begin{array}{c|cc} 15 & 1- & 1 \\ 70 & 7 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 25 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{array} \right] \xleftrightarrow{ص_1 + ص_2 \leftarrow ص_1} \left[\begin{array}{c|cc} 15 & 1- & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

وهنا انتهت العمليات بتحويل القسم الأيمن من المصفوفة الموسعة إلى مصفوفة محايدة؛ ليصبح القسم الأيسر حلاً للنظام حيث:

سعر بطاقة البالغ س = 25

سعر بطاقة الطفل ص = 10

(تحقق من صحة الحل)

تدريب ١٨-٤

مستخدمًا عمليات الصف البسيطة، حل النظام الآتي:

$$2س + ص = 0$$

$$5س - 2ص = 6$$



الأسئلة

(١) اكتب المصفوفة الموسعة لكل نظام من أنظمة المعادلات الآتية:

$$\text{أ) } \begin{cases} 2س - 3ص = 5 \\ س + ص = 9 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 4ص = 18 - س \\ س + ص = 5 \end{cases}$$

(٢) حل أنظمة المعادلات الآتية مستخدماً عمليات الصف البسيطة، ثم تحقق من صحة الحل:

$$\text{أ) } \begin{cases} س + 3ص = 5 \\ س - 1 = 2ص \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 3س = 1 - 2ص \\ 2س - 3ص = 0 \end{cases}$$

(٣) اشترى عز الدين أسهماً في شركتين مختلفتين بمبلغ ٤٠٠٠ دينار، وفي نهاية العام حصل على ربح نسبته ١٪ من المبلغ الذي استثمره في الشركة الأولى، وربح نسبته ٤٪ من المبلغ الذي استثمره في الشركة الثانية، فإذا علمت أن مجموع أرباحه بلغت ١١٠ دينار. فكم يكون المبلغ الذي استثمره عز الدين في كل شركة؟

أُسْئَلَةُ الْوَحْدَةِ

$$(١) \text{ إذا كانت } S = \begin{bmatrix} 3- & 2 & 4 \\ 5 & 1- & 7 \end{bmatrix}$$

أ (ما رتبة المصفوفة S؟

ب (حدّد قيمة كلّ من المدخلات الآتية: S_{١١}، S_{٣٢}

ج (جدّ النظير الجمعي للمصفوفة S

$$(٢) \text{ إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 3 & 2- & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1- & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 3- & 1 \\ 8 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ج } = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1- \end{bmatrix}$$

جدّ كلّاً ممّا يأتي:

$$\text{أ (} A + B \quad \text{ب (} B + \text{ج} \quad \text{ج (} 12 - 3B + \text{ج}$$

(٣) اكتب النظام الآتي مستخدماً ضرب المصفوفات:

$$4S - 3ص = 1$$

$$5 = 3S + ص$$

(٤) جدّ قيم S، ص، ع التي تحقق كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

$$\text{أ (} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & S \\ ص & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب (} \begin{bmatrix} 3+ص & 1 \\ 3 & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3+ص \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$$

(٥) إذا كانت $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

جدّ النظيرَ الضربّي للمصفوفة M

(٦) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 20 & 1-s \\ s & 1 \end{bmatrix}$ ، جدّ قيم s التي تجعل A مصفوفةً منفردةً.

(٧) باستخدام قاعدة كرامر، حلّ كلّ نظامٍ من النظامين الآتيين:

أ) $2(s + v) - 5 = 0$

$4(1 - v) = 3s$

ب) $4l + 5n + e = 14$

$3n + l + 2e = 7$

$n + 10l = 12$

(٨) احسب مجموعة قيم s التي تجعل للمصفوفة $L = \begin{bmatrix} 4 & s \\ s & s \end{bmatrix}$ نظيرًا ضربيًا.

(٩) حديقة مستطيلة الشكل، محيطها ستون مترًا، وطولها يزيد على عرضها بثمانية أمتار.

أ) اكتب نظام المعادلات المرتبط بهذه المسألة.

ب) اكتب المصفوفة الموسّعة المرافقة للنظام.

ج) جدّ أبعاد الحديقة مستخدمًا عمليات الصف البسيطة.

$$(١٠) \text{ إذا كانت } \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \text{س} , \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \text{ص}$$

جد قيمة :

أ) $(\text{س} + \text{ص})^2$

ب) $\text{س}^2 + ٢\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2$

ج) $\text{س} - \text{ص}$

د) $٢|\text{س}|$

هـ) $|\text{س} \times \text{ص}|$

(١١) لدى مصنع للألبان صنفان من الحليب: الأول قليل الدسم بنسبة دسم ١٪، والثاني عالي الدسم بنسبة دسم ٤٪، يُراد خلط هذين الصنفين لتعبئة عبوات كبيرة من الحليب تحوي كل منها ٩ لترات، بحيث تكون نسبة الدسم فيها ٢٪.

أ) حوّل البيانات الواردة في المسألة إلى نظام من المعادلات الخطية.

ب) اكتب المصفوفة الموسعة المرافقة للنظام.

ج) استخدم عمليات الصف البسيطة لمعرفة عدد لترات كل صنف من الحليب التي يجب أن تخلط في هذه العبوة.

(١٢) إذا كان أ، ب مصفوفتين من الرتبة ٢ × ن ، ٥ × م على التوالي، وكان أ × ب من الرتبة ل × ٣، فجد قيمة كل من م، ن، ل.





ISBN: 978-9957-84-713-5



9 789957 847135

الزور
مطبعة